ПРИЛОЖЕНИЕ 7

Задачи для самостоятельной работы

Правило умножения

1. В меню столовой предложено на выбор 5 первых, 8 вторых и 4 третьих блюда. Сколько различных вариантов обедов, состоящих из одного первого, одного второго и одного третьего блюда, можно составить из предложенного меню?

2. Миша забыл вторую и последнюю цифру пятизначного номера телефона друга. Какое наибольшее число звонков предстоит сделать Мише, если он решил перепробовать комбинации всех забытых цифр, чтобы в результате дозвониться до друга?

3. Девятиклассники Миша, Дима, Антон и Саша побежали на перемене к теннисному столу, за которым уже шла игра. Сколькими способами подбежавшие к столу четверо девятиклассников могут занять очередь для игры в настольный теннис?

4. Здание школы имеет 5 запасных выходов. Сколькими способами можно войти и выйти из здания школы?

5. Составляя расписание уроков на понедельник для 9 «Б» класса, завуч хочет первым уроком поставить либо физику, либо алгебру, а вторым – либо русский язык, либо литературу, либо историю, либо географию. Сколько существует вариантов составления расписания на первые два урока?

6. У Светланы три юбки и 5 кофт, удачно сочетающихся по цвету. Сколько различных комбинаций из юбок и кофт имеется у Светланы?

Перестановки

1. Сколькими способами Дима и Вова могут занять 2 места за одной двухместной партой?

3. Из трёх стаканов сока – яблочного, сливового и абрикосового – Коля решил последовательно выпить два. Перечислите все варианты, которыми это можно сделать.

4. Сергей, Игорь и Миша могут занять 1-е, 2-е и 3-е призовые места в соревнованиях по шахматам. Перечислить всевозможные последовательности из имён мальчиков, где порядковый номер в последовательности соответствует занятому мальчиком месту в

5. У Влада на обед – первое, второе, третье и пирожное. Он обязательно начнёт с пирожного, а всё остальное съест в произвольном порядке. Найдите число возможных вариантов обеда.

6. Четыре друга купили билеты в кино: на 1-е и 2-е места в первом ряду и на 1-е и 2-е места во втором ряду. Сколькими способами друзья могут занять эти 4 места в кинотеатре?

8. Ольга помнит, что телефон подруги оканчивается цифрами 5, 7, 8, но забыла, в каком порядке эти цифры следуют. Укажите наибольшее число вариантов, которые ей придётся перебрать, чтобы дозвониться подруге.

9. Семь мальчиков, в число которых входят Сергей и Игорь, становятся в ряд. Найдите число возможных комбинаций, если:
а) Сергей должен находиться в конце ряда;
б) Сергей должен находиться в начале ряда, а Игорь – в конце ряда;
в) Сергей и Игорь должны стоять рядом.

10. Одиннадцать футболистов школьной команды строятся перед началом матча. Первым становится капитан, вторым – вратарь, а остальные – случайным образом. Сколько существует способов построения?

11. В расписании на понедельник шесть уроков: алгебра, геометрия, биология, история, химия, физкультура. Сколькими способами можно составить расписание уроков на этот день так, чтобы два урока математики стояли рядом?

Сочетания

1. Имеется три предмета: карандаш, тетрадь и линейка. Сколькими способами из этих канцелярских принадлежностей можно выбрать 2 предмета?
способа.

2. В школьной столовой имеются помидоры, огурцы и лук. Сколько различных салатов можно приготовить, если в каждый из них должны входить в равных долях 2 различных вида овощей? Записать все сочетания овощей в составленных салатах.

3. Володя идёт на день может сделать подарки братьям?

4. В магазине продают кепки трёх цветов: белые, красные и синие. Наташа и Лена покупают себе по одной кепке. Сколько существует различных вариантов покупок для этих девочек?

5. Сколько существует способов выбрать троих ребят из 11 желающих дежурить по школе?

6. В 9 «Г» классе 5 человек успешно занимаются математикой. Сколькими способами можно выбрать из них двоих для участия в математической олимпиаде?

7. Учащимся дали список из 10 книг, которые рекомендуется прочитать во время каникул. Сколькими способами ученик может выбрать из них 6 книг?

8. В 9 «Г» классе учатся 16 мальчиков и 10 девочек. Для уборки территории требуется выделить четырёх мальчиков и трёх девочек. Сколькими способами можно это сделать?

9. В библиотеке Кате предложили на выбор из новых поступлений 10 книг и 4 журнала. Сколькими способами она может выбрать из них 3 книги и 2 журнала?

10. В 9 «Б» классе учатся 22 учащихся, в 9 «В» - 19 учащихся, а в 9 «Г» - 26 учащихся. Для работы на пришкольном участке надо выделить трёх учащихся из 9 «Б» класса, двух –

из 9 «В» и одного – из 9 «Г». Сколько существует способов выбора учащихся для работы на пришкольном участке?

11. По списку в 9 «Г» классе 16 мальчиков и 10 девочек. Нужно выбрать двух дежурных по классу. Сколькими способами это можно сделать: а) при условии. Что пару обязательно должны составить мальчик и девочка; б) без указанного условия?

12. По списку в 9 «Г» классе 16 мальчиков и 10 девочек. Нужно выбрать двух дежурных по классу. Нужно выделить группу из трёх человек для посещения заболевшего одноклассника. Сколькими способами это можно сделать, если: а) все члены этой группы должны быть девочками; б) все члены этой группы должны быть мальчиками; в) в группе должны быть 1 девочка и 2 мальчика; г) в группе должны быть 2 девочки и 1 мальчик.

Подсчёт вариантов

1. Сколькими различными способами можно назначить двух ребят на дежурство по столовой, если в классе 22 учащихся?

2. В шахматном турнире участвуют 9 старшеклассников. Каждый из них сыграл с каждым по одной партии. Сколько всего партий было сыграно?

3. При встрече 8 друзей обменялись рукопожатиями. Сколько всего было сделано рукопожатий?

4. У Марины пять подруг: Наташа, Оля, Кристина, Ксения и Светлана. Она решила двух из них пригласить в кино. Сколько существует вариантов?

5. Учащиеся 9 «Г» класса решили обменяться фотографиями. Сколько фотографий для этого потребуется, если в классе 26 учащихся?

Разбиение на две группы

1. В списке класса для изучения английского языка 15 человек. Сколько существует вариантов присутствия (отсутствия) этих людей на занятии?

2. Имеется 6 карандашей шести разных цветов. Сколькими способами эти карандаши могут быть распределены между двумя школьниками?

3. Каждая из 5 подруг собирается вечером пойти либо в кино, либо на каток. Сколькими различными способами эти пять подруг смогли бы провести вечер?

4. У Антона шесть друзей. Он может пригласить в гости одного или нескольких из них. Определите общее число возможных вариантов.

Размещения

1. Из трёх стаканов сока – ананасового, брусничного и виноградного – Костя решил последовательно выпить два. Сколькими способами это можно сделать?

2. Сколькими способами могут быть заняты первое, второе и третье места (по одной команде на место) на соревнованиях по гимнастике, в которых участвуют 6 команд?

3. Из 26 учащихся класса надо выбрать старосту и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

4. На соревнованиях по лёгкой атлетике нашу школу представляла команда из 10 спортсменов. Сколькими способами тренер может определить, кто из них побежит в эстафете 4×100 м на первом, втором, третьем и четвёртом этапах?

5. Сколькими способами могут быть распределены первая, вторая и третья премии между 13 участниками конкурса?

6. Сколькими способами 6 девятиклассников, сдающих экзамен, могут занять места в кабинете, в котором стоит 15 столов?

7 Сколько команд участвовало в финале первенства города по хоккею, если каждая команда сыграла с каждой из остальных по одной игре на своём поле и по одной игре на поле соперника, причём всего было сыграно 30 игр?

8. В классе 30 учащихся. Сколькими способами можно выбрать из класса команду из 4 учащихся для участия в олимпиаде по истории, литературе, русскому и английскому языкам?

9. Учащиеся 9 класса изучают 14 предметов. Сколькими способами можно составить расписание уроков на один день так, чтобы было 6 различных уроков?

Комбинированные задачи

1. В шахматном кружке занимаются 16 человек. Сколькими способами тренер может выбрать из них для предстоящего турнира: а) команду из четырёх человек; б) команду из четырёх человек, указав при этом, кто из членов команды будет играть на первой, второй, третьей и четвёртой доске?

2. Из 20 вопросов к экзамену Саша 12 вопросов выучил, 5 совсем не смотрел, а в остальных что-то знает, а что-то не знает. На экзамене в билете будет три вопроса.

а) Сколько существует вариантов билетов?

б) Сколько из них тех, в которых Саша знает все вопросы?

в) Сколько из них тех, в которых есть вопросы всех трёх типов?

г) Сколько из них тех, в которых Саша выучил большинство вопросов?

Задачи для самостоятельной работы. Решения и ответы

Правило умножения

1. В меню столовой предложено на выбор 5 первых, 8 вторых и 4 третьих блюда. Сколько различных вариантов обедов, состоящих из одного первого, одного второго и одного третьего блюда, можно составить из предложенного меню?

Решение: Согласно правилу умножения таких обедов можно составить $5 \cdot 8 \cdot 4 = 160$.
Ответ: 160 вариантов обедов.

2. Миша забыл вторую и последнюю цифру пятизначного номера телефона друга. Какое наибольшее число звонков предстоит сделать Мише, если он решил перепробовать комбинации всех забытых цифр, чтобы в результате дозвониться до друга?

Решение: Второй и последней цифрой могут быть все 10 цифр. По правилу умножения получаем $10 \cdot 10 = 100$. *Ответ:* 100 звонков.

3. Девятиклассники Миша, Дима, Антон и Саша побежали на перемене к теннисному столу, за которым уже шла игра. Сколькими способами подбежавшие к столу четверо девятиклассников могут занять очередь для игры в настольный теннис?

Решение: Первым в очередь мог встать любой девятиклассник, вторым – любой из оставшихся троих, третьим – любой из оставшихся двоих и четвёртым – девятиклассник, подбежавший последним. По правилу умножения у четверых ребят существует $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ способа занять очередь. *Ответ:* 24 способа.

4. Здание школы имеет 5 запасных выходов. Сколькими способами можно войти и выйти из здания школы?

Решение: По правилу умножения получаем $5 \cdot 5 = 25$ способов. *Ответ:* 25 способов.

5. Составляя расписание уроков на понедельник для 9 «Б» класса, завуч хочет первым уроком поставить либо физику, либо алгебру, а вторым – либо русский язык, либо литературу, либо историю, либо географию. Сколько существует вариантов составления расписания на первые два урока?

Решение: По правилу умножения получаем: $4 \cdot 2 = 8$ вариантов. *Ответ:* 8 вариантов.

6. У Светланы три юбки и 5 кофт, удачно сочетающихся по цвету. Сколько различных комбинаций из юбок и кофт имеется у Светланы?
7. *Решение:* По правилу умножения получаем: $3 \cdot 5 = 15$.*Ответ:* 15 комбинаций.

Перестановки

1. Сколькими способами Дима и Вова могут занять 2 места за одной двухместной партой?

1 решение: Присвоим каждому месту за партой номер. Тогда Дима и Вова могут занять места за партой такими способами: 1. Дима. 2. Вова или 1. Вова.2. Дима. Других вариантов нет.

2 решение: Количество различных способов равно числу перестановок из 2 элементов: $P_2 = 2! = 1\cdot 2 = 2$ способа. *Ответ:* 2 способа.

2. Олеся, Оксана и Юля купили билеты на концерт симфонического оркестра на 1, 2 и 3-е места первого ряда. Сколько существует способов размещения девочек на эти места?

Решение: Количество различных способов равно числу перестановок из 3 элементов: $P_3 = 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$ способов. *Ответ:* 6 способов.

4. Из трёх стаканов сока – яблочного, сливового и абрикосового – Коля решил последовательно выпить два. Перечислите все варианты, которыми это можно сделать.

Ответ: 1) яблочный, сливовый; 2) сливовый, яблочный; 3) яблочный, абрикосовый; 4) абрикосовый, яблочный; 5) сливовый, абрикосовый;6) абрикосовый, сливовый.

4. Сергей, Игорь и Миша могут занять 1-е, 2-е и 3-е призовые места в соревнованиях по шахматам. Перечислить всевозможные последовательности из имён мальчиков, где порядковый номер в последовательности соответствует занятому мальчиком месту в соревнованиях. Подсчитать их количество.

Решение: Сначала выбираем одного на первое место, а двух других меняем местами, потом берём на первое место другого и т.д.: СИМ; СМИ; ИСМ; ИМС; МСИ; МИС. Всего 6 вариантов расположения. *Ответ:* 6 вариантов.

5. У Влада на обед – первое, второе, третье и пирожное. Он обязательно начнёт с пирожного, а всё остальное съест в произвольном порядке. Найдите число возможных вариантов обеда.

Решение: После пирожного Влад может выбрать любое из трёх блюд, затем – из двух, и закончит оставшимся. Общее число возможных вариантов обеда: $3\cdot 2\cdot 1=6$. *Ответ:* 6.

6. Четыре друга купили билеты в кино: на 1-е и 2-е места в первом ряду и на 1-е и 2-е места во втором ряду. Сколькими способами друзья могут занять эти 4 места в кинотеатре?

Решение: Четыре друга могут занять 4 разных места $P_4=4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$ различными способами. *Ответ:* 24 способа.

8. Ольга помнит, что телефон подруги оканчивается цифрами 5, 7, 8, но забыла, в каком порядке эти цифры следуют. Укажите наибольшее число вариантов, которые ей придётся перебрать, чтобы дозвониться подруге.

Решение: Три последних цифры телефонного номера могут быть расположены в одном из $P_3=3!=1\cdot 2\cdot 3=6$ возможных порядков, из которых только один верный. Ольга может сразу набрать верный вариант, может набрать его третьим, и т.д. Наибольшее число вариантов ей придётся набрать, если правильный вариант окажется последним, т.е. шестым. *Ответ:* 6 вариантов.

9. Семь мальчиков, в число которых входят Сергей и Игорь, становятся в ряд. Найдите число возможных комбинаций, если:
а) Сергей должен находиться в конце ряда;
б) Сергей должен находиться в начале ряда, а Игорь – в конце ряда;

в) Сергей и Игорь должны стоять рядом.

Решение: а) Всего 7 мальчиков на 7 местах, но один элемент фиксирован, не переставляется (Сергей находится в конце ряда). Число возможных комбинаций при этом равно числу перестановок 6 мальчиков, стоящих пред Сергеем: $P_6=6!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6=720$.

б) Два элемента фиксированы. Число возможных комбинаций равно числу перестановок 5 мальчиков, стоящих между Сергеем и Игорем: $P_5=5!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$.

в) Воспользуемся приёмом «склеивания» элементов. Пусть Сергей и Игорь стоят рядом в порядке СИ. Будем рассматривать эту пару как единый элемент, представляемый с другими пятью элементами. Число возможных комбинаций тогда будет $P_6=6!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6=720$. пусть теперь Сергей и Игорь стоят рядом в порядке ИС. Тогда получим ещё $P_6=6!=720$ других комбинаций. Общее число комбинаций, в которых Сергей и Игорь стоят рядом (в любом порядке) равно 720+720=1440.

Ответ: а) 720; б) 120; в) 1440 комбинаций.

10. Одиннадцать футболистов школьной команды строятся перед началом матча. Первым становится капитан, вторым – вратарь, а остальные – случайным образом. Сколько существует способов построения?

Решение: После капитана и вратаря третий игрок может выбрать любое из 9 оставшихся мест, следующий – из 8, и т.д. Общее число способов построения по правилу умножения равно: $1\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=362880$, или $1\cdot P_9=9!=362880$.

Ответ: 362880.

11. В расписании на понедельник шесть уроков: алгебра, геометрия, биология, история, химия, физкультура. Сколькими способами можно составить расписание уроков на этот день так, чтобы два урока математики стояли рядом?

Решение: Всего 6 уроков, из них два урока математики должны стоять рядом. «Склеиваем» два элемента (алгебра и геометрия) сначала в порядке АГ, затем в порядке ГА. При каждом варианте «склеивания» получаем: $P_5=5!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$ вариантов расписания. Общее число способов составить расписание равно 120+120=240.

Ответ: 240 способов.

Сочетания

1. Имеется три предмета: карандаш, тетрадь и линейка. Сколькими способами из этих канцелярских принадлежностей можно выбрать 2 предмета?

1 решение: Два предмета можно выбрать так: берём поочерёдно один предмет из ряда (кроме последнего) и добавляем к нему по одному предметы, следующие за ним в ряду: карандаш, тетрадь; карандаш, линейка; тетрадь, линейка. Получаем 3 различных варианта.

2 решение: $C_3^2=\frac{3!}{1!\cdot2!}-\frac{1\cdot2\cdot3}{1\cdot1\cdot2}=3$ способа. *Ответ:* 3 способа.

2. В школьной столовой имеются помидоры, огурцы и лук. Сколько различных салатов можно приготовить, если в каждый из них должны входить в равных долях 2 различных вида овощей? Записать все сочетания овощей в составленных салатах.

Решение: Расположим данные овощи по порядку: помидоры, огурцы, лук. Запишем все сочетания овощей в салатах. Будем брать поочерёдно каждый овощ (кроме последнего) и добавлять к нему по одному, только из последующих, поскольку порядок выбора не важен: 1) помидоры, огурцы; 2) помидоры, лук; 3) огурцы, лук.

Ответ: 3 вида салатов.

3. Володя идёт на день может сделать подарки братьям?

Решение: По условию задачи предусмотрены два последовательных выбора: сначала Володя выбирает 2 мяча из трёх, имеющихся в магазине, а потом решает, какому из братьев-двойняшек подать каждый из купленных мячей. Два мяча из трёх можно выбрать тремя способами ($C_3^2 = \frac{3!}{1!\cdot 2!} - \frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 1\cdot 2} = 3$ способа). После этого каждую выбранную пару можно подарить двумя способами ($C_2^1 = \frac{2!}{1!\cdot 1!} = 2$ способа) (порядок важен). Тогда по правилу умножения искомое число способов равно $C_3^2 \cdot C_2^1 = 3\cdot 2 = 6$. *Ответ:* 6 способов.

4. В магазине продают кепки трёх цветов: белые, красные и синие. Наташа и Лена покупают себе по одной кепке. Сколько существует различных вариантов покупок для этих девочек?

Решение: В магазине продаются кепки трёх видов, поэтому девочки могут купить кепки одинаковых цветов, т.е. возможен выбор с повторением. Порядок выбора также важен и должен учитываться. Лена может сделать выбор $C_3^1 = \frac{3!}{2!\cdot 1!} = 3$ способами и Наташа также 3 способами. По теореме умножения получаем: $C_3^1 \cdot C_3^1 = 3\cdot 3 = 9$ вариантов.

Ответ: 9 вариантов.

5. Сколько существует способов выбрать троих ребят из 11 желающих дежурить по школе?

Решение: Количество сочетаний из 11 по 3 (порядок выбора не имеет значения) равно: $C_{11}^3 = \frac{11!}{3!\cdot 8!} = \frac{11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3} = 165$. *Ответ:* 165 способов.

6. В 9 «Г» классе 5 человек успешно занимаются математикой. Сколькими способами можно выбрать из них двоих для участия в математической олимпиаде?

Решение: Выбираем 2 учащихся из 5, порядок выбора не имеет значения (оба выбранных пойдут на олимпиаду как полностью равноправные); количество способов выбора равно числу сочетаний из 5 по 2: $C_5^2 = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2} = 10$. *Ответ:* 10 способов.

7. Учащимся дали список из 10 книг, которые рекомендуется прочитать во время каникул. Сколькими способами ученик может выбрать из них 6 книг?

Решение: Выбор 6 из 10 без учёта порядка: $C_{10}^6 = \frac{10!}{4!\cdot 6!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 210$ способов.

Ответ: 210 способов.

8. В 9 «Г» классе учатся 16 мальчиков и 10 девочек. Для уборки территории требуется выделить четырёх мальчиков и трёх девочек. Сколькими способами можно это сделать?

Решение: Нужно сделать два выбора: 4 мальчиков из 16 (всего способов C_{16}^{4}) и 3 девочек из 10 (всего способов C_{10}^{3}); порядок выбора значения не имеет (все идущие на уборку равноправные). Каждый вариант выбора мальчиков может сочетаться с каждым выбором девочек, поэтому по правилу умножения общее число способов выбора равно: $C_{16}^{4}\cdot C_{10}^{3}=\frac{16!}{12!\cdot 4!}\cdot\frac{10!}{3!\cdot 7!}=\frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}=218400$ способов. *Ответ:* 218400 способов.

9. В библиотеке Кате предложили на выбор из новых поступлений 10 книг и 4 журнала. Сколькими способами она может выбрать из них 3 книги и 2 журнала?

Решение: Нужно сделать два выбора: 3 книги из 10 (C_{10}^{3} способов) и 2 журнала из 4 (C_{4}^{2} способов); порядок выбора не имеет значения. Каждый выбор книг может сочетаться с каждым выбором журналов, поэтому общее число способов выбора по правилу умножения равно: $C_{10}^{3}\cdot C_{4}^{2}=\frac{10!}{3!\cdot 7!}\cdot\frac{4!}{2!\cdot 2!}=\frac{10\cdot 9\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}=720$. *Ответ:* 720 способов.

10. В 9 «Б» классе учатся 22 учащихся, в 9 «В» - 19 учащихся, а в 9 «Г» - 26 учащихся. Для работы на пришкольном участке надо выделить трёх учащихся из 9 «Б» класса, двух – из 9 «В» и одного – из 9 «Г». Сколько существует способов выбора учащихся для работы на пришкольном участке?

Решение: Выбор из трёх совокупностей без учёта порядка, каждый вариант выбора из первой совокупности (C_{22}^{3}) может сочетаться с каждым вариантом выбора из второй (C_{19}^{2}) и с каждым вариантом выбора третьей (C_{26}^{1}); по правилу умножения получаем: $C_{22}^{3}\cdot C_{19}^{2}\cdot C_{26}^{1}=\frac{22!}{18!\cdot 4!}\cdot\frac{19!}{17!\cdot 2!}\cdot\frac{26!}{25!\cdot 1!}=\frac{22\cdot 21\cdot 20\cdot 19}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{19\cdot 18}{1\cdot 2}\cdot 26=32522490$ способов выбора учащихся.

Ответ: 32522490 способов.

11. По списку в 9 «Г» классе 16 мальчиков и 10 девочек. Нужно выбрать двух дежурных по классу. Сколькими способами это можно сделать: а) при условии. Что пару обязательно должны составить мальчик и девочка; б) без указанного условия?

Решение: а) Выбираем 1 мальчика из 16 и 1 девочку из 10; общее число способов выбора пары: $C_{16}^{1}\cdot C_{10}^{1}=16\cdot 10=160$. б) Выбрать 2 дежурных из 16+10=26 учащихся класса (без учёта порядка) можно: $C_{26}^{2}=\frac{26!}{24!\cdot 2!}=\frac{26\cdot 25}{1\cdot 2}=325$ способами.

Ответ: а) 160; б) 325.

12. По списку в 9 «Г» классе 16 мальчиков и 10 девочек. Нужно выбрать двух дежурных по классу. Нужно выделить группу из трёх человек для посещения заболевшего одноклассника. Сколькими способами это можно сделать, если: а) все члены этой группы должны быть девочками; б) все члены этой группы должны быть мальчиками; в) в группе должны быть 1 девочка и 2 мальчика; г) в группе должны быть 2 девочки и 1 мальчик.

Решение: а) Выбрать 3 девочек из 10 имеющихся без учёта порядка можно

$C_{10}^{3}=\frac{10!}{7!\cdot 3!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}=120$ различными способами. б) Выбрать 3 мальчиков из 16 рождения к одноклассникам, двойняшкам Диме и Ивану. Он хочет подарить каждому из них по мячу. В магазине остались для продажи только 3 мяча разных цветов: белый, чёрный и пятнистый. Сколькими способами, купив 2 мяча, Володя

имеющихся, без учёта порядка, можно $C_{16}^{3}=\dfrac{16!}{13!\cdot 3!}=\dfrac{16\cdot 15\cdot 14}{1\cdot 2\cdot 3}=560$ различными способами. в) Выбрать 1 девочку из 10, а затем 2 мальчика из 16 без учёта порядка можно $C_{10}^{1}\cdot C_{16}^{2}=10\cdot\dfrac{16\cdot 15}{2}=1200$ различными способами. г) Выбрать 2 девочек из 10, а затем 1 мальчика из 16 без учёта порядка можно $C_{10}^{2}\cdot C_{16}^{1}=\dfrac{10\cdot 9}{2}\cdot 16=720$ различными способами.

Ответ: а) 120; б) 560; в) 1200; г) 720.

Подсчёт вариантов

1. Сколькими различными способами можно назначить двух ребят на дежурство по столовой, если в классе 22 учащихся?

Решение: Назначая двух дежурных по столовой, мы не учитываем порядок выбора пары из учащихся данного класса. Так как в классе 22 учащихся, то первого дежурного можно выбрать из 22 учащихся, а второго – из 21 учащегося. Так как порядок выбора не учитывается, то получаем 22·21:2=231 способ. *Ответ:* 231 способ

2. В шахматном турнире участвуют 9 старшеклассников. Каждый из них сыграл с каждым по одной партии. Сколько всего партий было сыграно?

Решение: Поскольку каждая пара участников играла между собой только один раз, порядок выбора не имеет значения. Выбрать первого участника партии можно 9 способами, а второго – 8 оставшимися способами; по теореме умножения всего можно образовать 9·8=72 пары, но в это число каждая пара входит дважды: сначала Дроздов-Гончаров, затем Гончаров-Дроздов. Поскольку порядок выбора не имеет значения, то общее количество партий равно 9·8:2=36 партий. *Ответ:* 36 партий.

3. При встрече 8 друзей обменялись рукопожатиями. Сколько всего было сделано рукопожатий?

Решение: Порядок выбора не имеет значения: если Агапеев пожимает руку Зайцеву, то одновременно и Зайцев пожимает руку Агапееву, поэтому общее количество рукопожатий (пар) равно 8·7:2=28. *Ответ:* 28 рукопожатий.

4. У Марины пять подруг: Наташа, Оля, Кристина, Ксения и Светлана. Она решила двух из них пригласить в кино. Сколько существует вариантов?

Решение: По условию ясно, что порядок выбора значения не имеет. По правилу умножения всего 5·4=20 вариантов выбора, но так как порядок выбора не имеет значения, то получаем: 20:2=10 вариантов. *Ответ:* 10 вариантов.

5. Учащиеся 9 «Г» класса решили обменяться фотографиями. Сколько фотографий для этого потребуется, если в классе 26 учащихся?

Решение: считаем, что в каждой паре происходит передача одновременно двух фотографий, т.е. учащиеся в паре равноправны, неразличимы. Тогда при образовании пар порядок выбора не имеет значения: 26·25:2=325. *Ответ:* 325 фотографий.

Разбиение на две группы

1. В списке класса для изучения английского языка 15 человек. Сколько существует вариантов присутствия (отсутствия) этих людей на занятии?

Решение: Задачу решаем разбиением на две группы: присутствующие и отсутствующие. Разбиение на группы однозначно определяется составом элементов в одной из групп (не попавшие в первую группу элементы автоматически образуют вторую группу). Подсчитаем все варианты составления одной группы. Согласно правилу умножения комбинаций (вариантов) из «присутствующих» или «отсутствующих» будет 2^{15}. *Ответ:* 2^{15}= 32768 вариантов

2. Имеется 6 карандашей шести разных цветов. Сколькими способами эти карандаши могут быть распределены между двумя школьниками?

Решение: Задача сводится к подсчёту числа всевозможных способов разбиения шести различных элементов (карандашей) на две группы. Это число равно $2^6 = 64$.
Ответ: 64 способами.

3. Каждая из 5 подруг собирается вечером пойти либо в кино, либо на каток. Сколькими различными способами эти пять подруг смогли бы провести вечер?

Решение: Подсчитаем все варианты составления одной группы. Согласно правилу умножения комбинаций (вариантов) из «посетивших кинотеатр» или «посетивших каток» будет 2^5. *Ответ:* 2^5= 32 варианта.

4. У Антона шесть друзей. Он может пригласить в гости одного или нескольких из них. Определите общее число возможных вариантов.

Решение: Разобьём множество из 6 элементов на две группы: приглашённых и неприглашённых. Расположим всех друзей в ряд, и под именем каждого друга будем писать 0, если этот друг не приглашён, и 1, если он приглашен. Получим шестизначные наборы нулей и единиц. Общее количество таких наборов по правилу умножения равно: 2^6=64, но среди этих наборов есть один, состоящий из 6 нулей, т.е. никто не приглашён. Этот набор нужно исключить (по условию задачи число приглашённых не менее одного), в результате получим: 64-1=63. *Ответ:* 63 варианта.

Размещения

1. Из трёх стаканов сока – ананасового, брусничного и виноградного – Костя решил последовательно выпить два. Сколькими способами это можно сделать?

Решение: Это задача о выборе двух элементов из трёх с учётом порядка выбора. Число способов равно $A_3^2 = \frac{3!}{1!} = 3 \cdot 2 = 6$ способов. *Ответ:* 6 способов.

2. Сколькими способами могут быть заняты первое, второе и третье места (по одной команде на место) на соревнованиях по гимнастике, в которых участвуют 6 команд?

Решение: Это задача о выборе трёх элементов из шести с учётом порядка выбора.
$A_6^3 = \frac{6!}{3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$. *Ответ:* 120 способов.

3. Из 26 учащихся класса надо выбрать старосту и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

Решение: Из 26 учащихся выбираем 2, причём порядок выбора имеет значение. Количество способов выбора равно $A_{26}^2 = \frac{26!}{24!} = 26 \cdot 25 = 650$. *Ответ:* 650 способов.

5. На соревнованиях по лёгкой атлетике нашу школу представляла команда из 10 спортсменов. Сколькими способами тренер может определить, кто из них побежит в эстафете 4×100 м на первом, втором, третьем и четвёртом этапах?

Решение: Выбор из 10 по 4 с учётом порядка: $A_{10}^4 = \frac{10!}{6!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ способов.

Ответ: 5040 способов.

6. Сколькими способами могут быть распределены первая, вторая и третья премии между 13 участниками конкурса?

Решение: Выбираем трёх призёров из 13 участников конкурса с учётом порядка (кому какая премия): $A_{13}^3 = \frac{13!}{10!} = 13 \cdot 12 \cdot 11 = 1716$ способов. *Ответ:* 1716 способов.

7. Сколькими способами 6 девятиклассников, сдающих экзамен, могут занять места в кабинете, в котором стоит 15 столов?

Решение: Выбираем 6 столов для девятиклассников из 15 имеющихся: порядок выбора учитывается (кто сидит у окна, кто около преподавателя, и т.п.):

$A_{15}^6 = \frac{15!}{9!} = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 = 3603600$ способов. *Ответ:* 3603600 способов.

8. Сколько команд участвовало в финале первенства города по хоккею, если каждая команда сыграла с каждой из остальных по одной игре на своём поле и по одной игре на поле соперника, причём всего было сыграно 30 игр?

Решение: Поскольку каждая пара команд сыграла между собой по две игры (на своём и чужом поле), то выбор пары осуществляется с учётом порядка, т.е. составляются всевозможные размещения из n по 2. По условию задачи $A_n^2 = 30$, отсюда $n(n-1) = 6 \cdot 5$, $n = 6$.

Ответ: 6 команд.

9. В классе 30 учащихся. Сколькими способами можно выбрать из класса команду из 4 учащихся для участия в олимпиаде по истории, литературе, русскому и английскому языкам?

Решение: Искомые команды будут отличаться между собой или учащимися, или их порядком, который указывает, на какую олимпиаду пойдёт ученик. Поэтому искомое число равно числу размещений из 30 по 4 и по формуле получаем:

$A_{30}^4 = \frac{30!}{26!} = 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 = 657720$ способов. *Ответ:* 657720 способов.

10. Учащиеся 9 класса изучают 14 предметов. Сколькими способами можно составить расписание уроков на один день так, чтобы было 6 различных уроков?

Решение: Выбираем 6 предметов из 14 имеющихся с учётом выбора предметов. Получаем $A_{14}^{6}=\frac{14!}{8!}=14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9=2162160$ способов. *Ответ:* 2162160 способов.

Комбинированные задачи

1. В шахматном кружке занимаются 16 человек. Сколькими способами тренер может выбрать из них для предстоящего турнира: а) команду из четырёх человек; б) команду из четырёх человек, указав при этом, кто из членов команды будет играть на первой, второй, третьей и четвёртой доске?

Решение: а) Выбираем 4 шахматистов из 16 без указания порядка; количество способов $C_{16}^{4}=\frac{16!}{12!\cdot 4!}=\frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=1820$. б) Выбираем 4 шахматистов из 16 с указанием порядка их расположения в команде; количество способов $A_{16}^{4}=\frac{16!}{12!}=16\cdot 15\cdot 14\cdot 13=43680$

Ответ: а) 1820 способов; б) 43680 способов.

2. Из 20 вопросов к экзамену Саша 12 вопросов выучил, 5 совсем не смотрел, а в остальных что-то знает, а что-то не знает. На экзамене в билете будет три вопроса.

а) Сколько существует вариантов билетов?

б) Сколько из них тех, в которых Саша знает все вопросы?

в) Сколько из них тех, в которых есть вопросы всех трёх типов?

г) Сколько из них тех, в которых Саша выучил большинство вопросов?

Решение: а) для составления билета выбираются 3 вопроса из 20 имеющихся, при этом порядок выбора значения не имеет. Общее число вариантов билетов равно:

$C_{20}^{3}=\frac{20!}{17!\cdot 3!}=\frac{20\cdot 19\cdot 16}{1\cdot 2\cdot 3}=1140$.

б) Саша выучил 12 вопросов; из этих вопросов можно составить

$C_{12}^{3}=\frac{12!}{9!\cdot 3!}=\frac{12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3}=220$ разных билетов.

в) Количество билетов, в которых есть вопросы всех трёх типов равно: 12 вариантов выбора вопроса, который выучил, умножить на 5 вариантов выбора вопроса, который совсем не смотрел, и умножить на 20-12-5=3 варианта выбора вопроса, в котором что-то знает, всего 12·5·3=180 разных билетов.

г) Билеты, в которых Саша выучил большинство вопросов, это билеты, в которых он знает два или три вопроса. Билеты, в которых Саша выучил все три вопроса – 220 (см.пункт б). Найдём сколько есть билетов, в которых Саша выучил 2 вопроса: выбрать 2 вопроса из 12 выученных можно C_{12}^{2} разными способами; третий вопрос можно выбрать из 8 остальных вопросов (8 вариантов выбора). По правилу умножения количество билетов, в которых Саша выучил два вопроса равно $C_{12}^{2}\cdot C_{8}^{1}=\frac{12!}{10!\cdot 2!}\cdot 8=\frac{12\cdot 11}{1\cdot 2}\cdot 8=528$.

Таким образом, количество билетов, в которых Саша выучил большинство вопросов, по комбинаторному правилу сложения равно 220+528=748.

Ответ: а) 1140; б) 220; в) 180; г) 748.